2013年安徽省高考数学理科试题

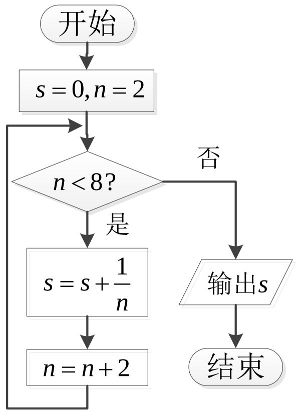
一、选择题(本大题共10小题，每小题5分，共50 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 设 i 是虚数单位，$\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数。若 $z\cdot\bar{z}\mathrm{i}+2=2z$，则 $z=$ ( )

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $1-\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

2. 如图所示，程序框图（算法流程图）的输出结果是 ( )

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{25}{24}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{11}{12}$



3. 在下列命题中，不是公理的是 ( )

A. 平行于同一个平面的两个平面相互平行

B. 过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面

C. 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在此平面内

D. 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线

4. “$a\leqslant 0$”是“函数 $f(x)=|(ax-1)x|$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 某班级有50名学生，其中有30名男生和20名女生，随机询问了该班五名男生和五名女生在某次数学测验中的成绩，五名男生的成绩分别为86,94,88,92,90，五名女生的成绩分别为88,93,93,88,93。下列说法一定正确的是 ( )

A. 这种抽样方法是一种分层抽样

B. 这种抽样方法是一种系统抽样

C. 这五名男生成绩的方差大于这五名女生成绩的方差

D. 该班男生成绩的平均数小于该班女生成绩的平均数

6. 已知一元二次不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x|x<-1或x>\frac{1}{2}\}$，则 $f(10^x)>0$ 的解集为 ( )

A. $\{x|x<-1或x>-\lg 2\}$

B. $\{x|-1<x<-\lg 2\}$

C. $\{x|x>-\lg 2\}$

D. $\{x|x<-\lg 2\}$

7. 在极坐标系中，圆 $\rho=2\cos\theta$ 的垂直于极轴的两条切线方程分别为 ( )

A. $\theta=0(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$

B. $\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$

C. $\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$

D. $\theta=0(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$

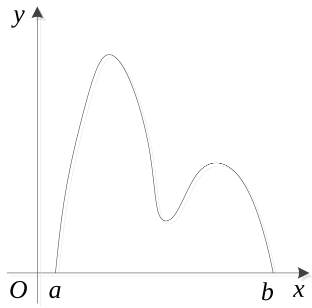
8. 函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\geqslant 2)$个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值范围是 ( )

A. $\{3,4\}$

B. $\{2,3,4\}$

C. $\{3,4,5\}$

D. $\{2,3\}$



9. 在平面直角坐标系中，O是坐标原点，两定点 A，B满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集 $\{P|\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant 1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$所表示的区域的面积是 ( )

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{3}$

10. 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$有极值点 x_1,x_2，且 $f(x_1)=x_1$，则关于 x的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$的不同实根个数是 ( )

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

二、填空题

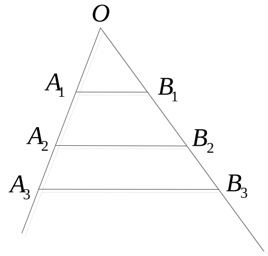
11. 若 $(x+\frac{a}{\sqrt[3]{x}})^8$ 的展开式中 x^4 的系数为 7，则实数 $a=$______.

12. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边是长分别为 a、b、c.若 $b+c=2a,3\sin A=5\sin B$，则角 $C=$______.

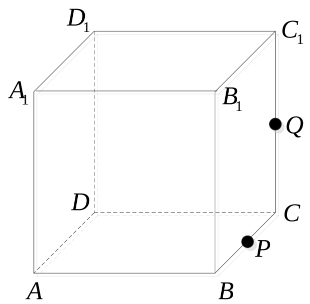
13. 已知直线 $y=a$ 交抛物线 $y=x^2$ 于 A,B 两点。若该抛物线上存在点 C，使得 $\angle ACB$ 为直角，则 a 的取值范围为______.

14. 如图，互不相同的点 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$分别在角 O 的两条边上，所有 A_nB_n 互相平行，且所有梯形 $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$ 的面积均相等。设 $OA_n=a_n$,若$a_1=1,a_2=2$，

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是______.



15. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为 BC 的中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，过点 A,P,Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S.则下列命题正确的是______(写出所有正确命题的编号).



①当 $O<CQ<\frac{1}{2}$ 时，S 为四边形

②当 $CQ=\frac{1}{2}$ 时，S 为等腰梯形

③当 $CQ=\frac{3}{4}$ 时，S 与 C_1D_1 的交点 R 满足 $C_1R=\frac{1}{3}$

④当 $\frac{3}{4}<CQ<1$ 时，S 为六边形

⑤当 $CQ=1$ 时，S 的面积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=4\cos\omega x\cdot\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1)求 ω 的值；

(2)讨论 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调性.

17. 设函数 $f(x)=ax-(1+a^2)x^2$.其中 $a>0$，区间 $I=\{x|f(x)>0\}$.

(1)求 I 的长度（注：区间 (α,β) 的长度定义为 $\beta-\alpha$);

(2)给定常数 $k\in(0,1)$，当 $1-k\leqslant a\leqslant 1+k$ 时，求 I 长度的最小值.

18. 设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1-a^2}=1$ 的焦点在 x 轴上.

(1)若椭圆 E 的焦距为1，求椭圆 E 的方程；

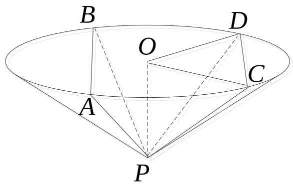
(2)设 F_1,F_2 分别是椭圆 E 的左、右焦点，P 为椭圆 E 上第一象限内的点，直线 F_2P 交 y 轴

与点 Q，并且 $F_1P \perp F_1Q$.证明：当 a 变化时，点 P 在某定直线上.

19. 如图，圆锥顶点为 P，底面圆心为 O，其母线与底面所成的角为22.5°, AB 和 CD 是底面圆 O 上的两条平行的弦，轴 OP 与平面 PCD 所成的角为 60°.

(1)证明：平面 PAB 与平面 PCD 的交线平行于底面；

(2)求 $\cos\angle COD$.



20. 设函数 $f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*)$. 证明：

(1)对每个 $n \in \mathbf{N}^*$，存在唯一的 $x_n \in [\frac{2}{3}, 1]$，满足 $f_n(x_n) = 0$;

(2)对任意 $p \in \mathbf{N}^*$，由(1)中 x_n 构成的数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$.

21. 某高校数学系计划在周六和周日个举行一次主题不同的心理测试活动，分别由李老师和张老师负责。已知该系共有 n 位学生，每次活动均需该系 k 位学生参加(n 和 k 都是固定的正整数).假设李老师和张老师分别将各自活动通知的信息独立、随机地发给该系 k 位学生，且所发信息都能收到.记该系收到李老师或张老师所发活动通知信息的学生人数为 X.

(1)求该系学生甲收到李老师或张老师所发活动通知信息的概率；

(2)求使 $P(X = m)$ 取得最大值的整数 m.

参考答案

1.解析：A

2.解析：D

3.解析：A

4.解析：C

5.解析：C

6.解析：D

7.解析：B

8.解析：B

9.解析：D

10.解析：A

11.解析：$\dfrac{1}{2}$

12.解析：$\dfrac{2\pi}{3}$

13.解析：$[1,+\infty)$

14.解析：$a_n=\sqrt{3n-2}$

15.解析：①②③⑤

16.解析：(1)$f(x)=\cos\omega x\cdot\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\sin\omega x+2\sqrt{2}\cos^2\omega x$
$=\sqrt{2}(\sin 2\omega x+\cos 2\omega x)+\sqrt{2}=2\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{4})+\sqrt{2}$. 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且 $\omega>0$，从而有 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，故 $\omega=1$.
(2)由(1)知，$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\sqrt{2}$.若$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$.
当 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，即 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 单调递增；
当 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$，即 $\dfrac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 单调递减.
综上可得，$f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{8}]$ 上单调递增，在区间 $[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减。

17.解析: (1)因为方程 $ax-(1+a^2)x^2>0(a>0)$ 有两个实根 $x_1=0,x_2=\dfrac{a}{1+a^2}$,

故 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$,

因此区间 $I=(0,\dfrac{a}{1+a^2}),I$ 的长度为 $\dfrac{a}{1+a^2}$.

(2)设 $d(a)=\dfrac{a}{1+a^2}$，则 $d'(a)=\dfrac{1-a}{(1+a^2)^2}$.令 $d'(a)=0$，得 $a=1$，由于 $0<k<1$，故

当 $1-k\leqslant a\leqslant 1$ 时，$d'(a)>0$，$d(a)$ 单调递增;

当 $1<a\leqslant 1+k$ 时，$d'(a)<0$，$d(a)$ 单调递减.

所以当 $1-k\leqslant a\leqslant 1+k$ 时，$d(a)$ 的最小值必定在 $a=1-k$ 或 $a=1+k$ 处取得,

而 $\dfrac{d(1-k)}{d(1+k)}=\dfrac{\dfrac{1-k}{1+(1-k)^2}}{\dfrac{1+k}{1+(1+k)^2}}=\dfrac{2-k^2-k^3}{2-k^2+k^3}<1$.故 $d(1-k)<d(1+k)$.

因此当 $d=1-k$ 时，$d(a)$ 在区间 $[1-k,1+k]$ 上取得最小值 $\dfrac{1-k}{2-2k+k^2}$.

18.解析: 因为焦距为1，所以 $2a^2-1=\dfrac{1}{4}$，解得 $a^2=\dfrac{5}{8}$.

故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{8x^2}{5}+\dfrac{8x^2}{3}=1$.

(2)设$P(x_n,y_n),F_1(-c,0),F_2(c,0)$，其中$c=\sqrt{2a^2-1}$. 由题设知$x_n\neq c$，直线$F_1P$是斜率$k_{F_1P}=\dfrac{y_0}{x_0+c}$,

直线F_2P是斜率$k_{F_2P}=\dfrac{y_0}{x_0-c}$,

故直线F_2P的方程为$y=\dfrac{y_0}{x_0-c}(x-c)$.

当$x=0$时，$y=\dfrac{cy_0}{c-x_0}$，即点Q的坐标为$(0,\dfrac{cy_0}{c-x_0})$.

因此，直线F_1Q的斜率为$k_{F_1Q}=\dfrac{y_0}{c-x_0}$.

由于$F_1P\perp F_1Q$，所以$k_{F_1P}\cdot k_{F_1Q}=\dfrac{y_0}{x_0+c}\cdot\dfrac{y_0}{c-x_0}=-1$.

化简得$y_0^2=x_0^2-(2a^2-1)$. ①

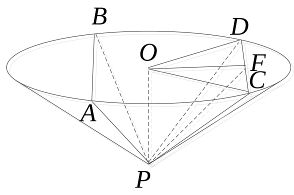
将①代入椭圆E的方程，由于点$P(x_0,y_0)$在第一象限，解得$x_0=a^2,y_0=1-a^2$，即点P在定直线$x+y=1$上.

19.解析: (1)证明：设面PAB与面PCD的交线为l.

因为$AB\parallel CD,AB$不在面PCD内，所以$AB/\!/$面PCD.

又因为$AB\subset$面PAB，面PAB与面PCD的交线为l，所以$AB\parallel l$.

由直线AB在底面上面，l在底面外可知，l与底面平行.



(2)解：设CD的中点为F，连接OF，PF.

由圆的性质，$\angle COD=2\angle COF, OF\perp CD$.

因为$OP\perp$底面，$CD\subset$底面，所以$OP\perp CD$，又$OP\cap OF=O$,故$CD\perp$面OPF.

又$CD\subset$面PCD，因此面$OPF\perp$面PCD，从而直线OP在面PCD上的射影为直线PF，故

$\angle OPF$为OP与面PCD所成的角.由题设，$\angle OPF=60^\circ$.

设$OP=h$，则$OF=OP\cdot\tan\angle OPF=h\cdot\tan 60^\circ=\sqrt{3}h$.

根据题设有$\angle OCP=22.5^\circ$，得$OC=\dfrac{OP}{\tan\angle OCP}=\dfrac{h}{\tan 22.5^\circ}$.

由$1=\tan 45^\circ=\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$和$\tan 22.5^\circ>0$，可解得$\tan 22.5^\circ=\sqrt{2}-1$,

因此$OC=\dfrac{h}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)h$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OCF$中，$\cos\angle COF=\dfrac{OF}{OC}=\dfrac{\sqrt{3}h}{(\sqrt{2}+1)h}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$,

故$\cos\angle COD=\cos(2\angle COF)=2\cos^2\angle COF-1=2(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2-1=17-12\sqrt{2}$.

20.解析: 证明: (1)对每个$n\in\mathbf{N}^*$, 当$x>0$时, $f_n'(x)=1+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{n}>0$, 故$f_n(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增.

由于$f_1(1)=0$，当$n\geqslant 2$时，$f_n(1)=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}>0$，故$f_n(1)\geqslant 0$。又

$$f_n(\frac{2}{3})=-1+\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(\frac{2}{3})^k}{k^2}\leqslant-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}(\frac{2}{3})^k$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\frac{2}{3})^2[1-(\frac{2}{3})^{n-1}]}{1-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}<0,$$

所以存在唯一的$x_n\in[\dfrac{2}{3},1]$，满足$f_n(x_n)=0$.

(2)当$x>0$时，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}>f_n(x)$，故$f_{n+1}(x_n)>f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})=0$.

由$f_{n+1}(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增知，$x_{n+1}<x_n$，故$\{x_n\}$为单调递减数列,

从而对任意$n,p\in\mathbf{N}^*$，$x_{n+p}<x_n$.

对任意$p\in\mathbf{N}^*$，由于

$$f_n(x_n)=-1+x_n+\frac{x_n^2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n^n}{n^2}=0, \qquad ①$$

$$f_{n+p}(x_{n+p})=-1+x_{n+p}+\frac{x_{n+p}^2}{2^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^n}{n^2}+\frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2}=0, \qquad ②$$

①式减去②式并移项，利用$0<x_{n+p}\leqslant 1$，得

$$x_n-x_{n+p}=\sum_{k=2}^{n}\frac{x_{n+p}^k-x_n^k}{k^2}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_{n+p}^k}{k^2}\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x_{n+p}^k}{k^2}$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-p}<\frac{1}{n}.$$

21.解析: 因为事件A:“学生甲收到李老师所发信息”与事件B:“学生甲收到张老师所发信息”是相互独立的事件，所以$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立。由于$P(A)=P(B)=\frac{\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}=\frac{k}{n}$，故$P(\overline{A})=P(\overline{B})=1-\frac{k}{n}$，因此学生甲收到活动通知信息的概率

$$P=1-(1-\frac{k}{n})^2=\frac{2kn-k^2}{n^2}.$$

(2)当$k=n$时，m只能取n，有$P(X=m)=P(X=n)=1$.

当$k<n$时，整数m满足$k\leqslant m\leqslant t$，其中t是$2k$和n中的较小者。由于“李老师和张老师各自独立、随机地发活动通知信息给k 位同学”所包含的基本事件总数为$(\mathrm{C}_n^k)^2$。当$X=m$时，同时收到李老师和张老师转发信息的学生人数恰为$2k-m$。仅收到李老师或仅收到张老师转发信息的学生人数均为$m-k$。由乘法计数原理知：事件$\{X=m\}$所含基本事件数为$\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_k^{2k-m}\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}=\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_k^{m-k}\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}$.

此时$P(X=m)=\frac{\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_k^{2k-m}\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}}{(\mathrm{C}_n^k)^2}=\frac{\mathrm{C}_k^{m-k}\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}}{\mathrm{C}_n^k}$. 当$k\leqslant m<t$时，$P(X=m)\leqslant P(X=m+1)\Leftrightarrow \mathrm{C}_k^{m-k}\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}\leqslant\mathrm{C}_k^{m+1-k}\mathrm{C}_{n-k}^{m+1-k}$.

$$\Leftrightarrow(m-k+1)^2\leqslant(n-m)(2k-m)\Leftrightarrow m\leqslant 2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}.$$

假如$k\leqslant 2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}<t$成立，则当$(k+1)^2$能被$n+2$整除时，

$$k\leqslant 2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}<2k+1-\frac{(k+1)^2}{n+2}\leqslant t。$$

故$P(X=m)$在$m=2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}$和$m=2k+1-\frac{(k+1)^2}{n+2}$处达最大值；当$(k+1)^2$不能被$n+2$整除时，$P(X=m)$在$m=2k-\left[\frac{(k+1)^2}{n+2}\right]$处达最大值.(注$[x]$表示不超过$x$的最大整数)

下面证明$k\leqslant 2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}<t$.

因为$1\leqslant k<n$，所以$2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}-k=\frac{kn-k^2-1}{n+2}\geqslant\frac{k(k+1)-k^2-1}{n+2}=\frac{k-1}{n+2}\geqslant 0$.

而$2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}-n=-\frac{(n-k+1)^2}{n+2}<0$，故$2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}<n$，显然$2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}<2k$.

因此$k\leqslant 2k-\frac{(k+1)^2}{n+2}<t$.